§ 4.1 数学期望

一、离散型随机变量的数学期望

- **例**：某人参加一抽奖活动，中大奖的概率为0.01，奖金为10000元；中小奖的概率为0.1，奖金为100元。若用X表示所得奖金，则X为随机变量，其分布列为

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 100 & 10000 \\ 0.89 & 0.1 & 0.01 \end{pmatrix}$$

- 则奖金的期望值为
0×0.89+100×0.1+10000×0.01=110元。

- **定义：** 设X为离散型随机变量，其分布律为

$P(X=x_k)=p_k$，$k=1,2,\ldots$

若$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|p_k<\infty$（为什么？）

记 $$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k$$

则称E(X)为随机变量X的**数学期望或均值。**

注：E(X)的定义与x_k的排列次序无关，因此需要级数绝对收敛。

几种常见离散型随机变量的数学期望

- 例：(0-1分布)设随机变量X服从

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}, p+q=1, 0<p<1$$

则$E(X)=p$

- 例：(二项分布)设随机变量X服从二项分布X~B(n, p)

  $p_k=P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, k=0,1,…,n

  其中p+q=1， 由定义可知 E(X)=np

- 例：(泊松分布)设随机变量X服从泊松分布X~P(λ)， 由定义可知 E(X)= λ

- 公式的推导：

$$EX=\sum_{k=0}^{n}kp_k=\sum_{k=0}^{n}kC_n^k p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k\cdot n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}=np\ 。$$

$$EX=\sum_{k=0}^{+\infty}kP(X=k)=\sum_{k=1}^{+\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

$$=\lambda\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{(k-1)}}{(k-1)!}e^{-\lambda}=\lambda\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda$$

二、连续型随机变量的数学期望

- **定义**：设X为具有密度函数p(x)的随机变量，若

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x|p(x)dx < \infty$$

记

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

- 则称E(X)为随机变量X的**数学期望**。

几种常见连续型随机变量的数学期望

- 例： (均匀分布)设随机变量X服从均匀分布 $X\sim U[a,b]$,由定义可知 $E(X)=(a+b)/2$

- 例：(正态分布)设随机变量$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，由定义可知 $E(X)=\mu$

- 例：(指数分布)设随机变量$X\sim E(\lambda)$，由定义可知 $E(X)=1/\lambda$

三、随机变量函数的数学期望

- **定理：** 对随机变量X的函数Y=g(X)，则
- (1). 设 X 为 离 散 型 随 机 变 量， 分 布 列 为 $p_k=P(X=x_k)$，k=1,2,…

$$\text{若}\sum_{k=1}^{\infty}\left|g(x_k)\right|p_k<\infty\text{，则}$$

$$E(Y)=Eg(X)=\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k$$

- (2). 设X为连续型随机变量，密度函数为p(x)，

若$\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|p(x)dx<\infty$,则有

$$E(Y)=Eg(X)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)p(x)dx$$

- (3). (X, Y)为离散型随机向量,分布列为：

  $p_{ij}=P(X=x_i，Y=y_j)，i , j=1,2,\ldots$

  则有

$$E(Z)=Eg(X,Y)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}$$

- (4). (X, Y)为连续型随机向量，密度函数为p(x,y)。则有

$$E(Z)=Eg(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y)p(x,y)dxdy$$

- **例:** 已知随机变量X在区间[0，2π]上服从均匀分布，试求$E(\sin X)$。
- **例**：设随机变量(X,Y)的联合密度为：

$$p(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0<x<1, 0<y<1 \\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求E(X+Y)。

- **解**：E(X+Y)=4/3

- 例：设随机向量($X_1, X_2, \ldots, X_n$)相互独立，服从[0,1]上的均匀分布， $X_{(n)}=\max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$，$X_{(1)}=\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$，试求$EX_{(n)}$及$EX_{(1)}$。
- 解：

$$p_{\max}(z)=\begin{cases} nz^{n-1}, & 0<z<1 \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

$$EX_{(n)}=\int_0^1 zp_{\max}(z)dz=\int_0^1 nz^n dz=\frac{n}{n+1}$$

$$EX_{(1)}=\int_0^1 zp_{\min}(z)dz=\int_0^1 nz(1-z)^{n-1}dz=\frac{1}{n+1}$$

四、数学期望的性质

- （1）EC=C, C为常数.
- （2）设k为常数，则E(kX)=k E(X).
- （3）若E(X)、E(Y)存在 ,则E(X+Y)=E(X)+E(Y)
- （4）若X、Y相互独立且E(X)、E(Y)存在，则 E(XY)=E(X)E(Y)

推广：设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是n个随机变量，则 $E(X_1+X_2+\ldots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\ldots+E(X_n)$

若它们相互独立，则$E(X_1X_2\ldots X_n)=E(X_1)E(X_2)\ldots E(X_n)$

- （3）的证明:我们仅对连续型情况加以证明。不妨设X和Y的密度函数为p(x,y)。

$$E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)p(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x,y)dxdy+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yp(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}y(\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}xp_X(x)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}yp_Y(y)dy=EX+EY$$

- （4）的证明:我们仅对连续型情况加以证明。不妨设X和Y的密度函数为$p_X(x)$, $p_Y(y)$。

$$EXY=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyp_X(x)p_Y(y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(\int_{-\infty}^{+\infty}xp_X(x)dx)yp_Y(y)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}xp_X(x)dx\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}yp_Y(y)dy$$

$$=EX\cdot EY。$$

- **例**:二项分布的期望。
- **例**:(超几何分布的期望)在N件产品中含*M*件次品，其余为正品。现从中任意不放回地取出*n*件，求抽得的平均次品数。
- **解**：令X为抽到的次品数。$P(X=k)=\dfrac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$

如果直接计算期望，则计算较为复杂。运用期望性质则可以简化运算。首先定义

$$X_i=\begin{cases}1 & \text{第}i\text{件次品被抽到}\\ 0 & \text{第}i\text{件次品未被抽到}\end{cases},\quad i=1,\cdots M.$$

$$P(X_i=1)=\frac{C_1^1 C_{N-1}^{n-1}}{C_N^n}=\frac{n}{N},\quad EX_i=P(X_i=1)=n/N$$

$$EX=E\left(X_1+X_2+\cdots+X_M\right)=EX_1+EX_2+\cdots+EX_M=\frac{nM}{N}$$

- **例**:(配对问题的数学期望)有N个人将他们的帽子抛向空中，帽子充分混合后，每人随机地从中取出一顶，求刚好拿到自己帽子的人数的数学期望。

- 解：

$$设X=\sum_{i=1}^{N}X_i,其中X_i=\begin{cases}1 & 第i个人拿对帽子\\ 0 & 第i个人拿错帽子\end{cases}$$

$$EX=E\sum_{i=1}^{N}X_i=\sum_{i=1}^{N}EX_i(注意这里X_i是不独立的）。$$

$$EX_i=1\times\frac{1}{N}+0\times\frac{N-1}{N}=\frac{1}{N};$$

$$EX=N\times\frac{1}{N}=1$$

- **例**：将n个球随机放入M个盒子，求有球的盒子数X的期望。
- **解**：

$$设X=\sum_{i=1}^{M}X_i,其中X_i=\begin{cases}1 & 第i个盒子有球\\ 0 & 第\mathrm{i}个盒子无球\end{cases}$$

$$EX=E\sum_{i=1}^{M}X_i=\sum_{i=1}^{M}EX_i(注意这里X_i是不独立的）。$$

$$\mathrm{P}(X_i=0)=(1-1/M)^n,EX_i=1-(1-1/M)^n;$$

$$EX=M[1-(1-1/M)^n]$$

§4.2 方差

- **定义**： 设X是随机变量，若$E[X-E(X)]^2$存在，则称它为随机变量X的**方差**，记为D(X)或Var(X)。方差D(X)的算术根称为**标准差或均方差**。

方差是刻画随机变量取值离散程度的一个指标.

- 设X为离散型随机变量，其分布列为

  P(X=x_k)=p_k，k =1,2,…

  则 $$DX = E(X-EX)^2 = \sum_{k=1}^{\infty}(x_k - EX)^2 p_k$$

- 设X为具有密度函数p(x)的随机变量，则

  $$D(X) = E(X-EX)^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(x-EX)^2 p(x)dx$$

- 一般情形： D(X)= E[X-E(X)]^2=E(X^2)-(EX)^2

几种常见分布的方差

- 例： (0-1分布)设随机变量X服从0-1分布，则 $D(X)=pq$

- 例： (二项分布)设随机变量$X\sim B(n, p)$，由定义可知 $D(X)=npq$

- 例： (泊松分布)设$X\sim P(\lambda)$，由定义可知 $D(X)=\lambda$

- 公式的推导：

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{n}k^2C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2\cdot n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}\frac{[(k-1)+1](n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}+np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$=np\left[(n-1)p+1\right]=(np)^2+np(1-p)$$

$$D(X)=EX^2-(EX)^2=(np)^2+np(1-p)-(np)^2=npq$$

- **例**： (均匀分布)设随机变量$X \sim U[a,b]$,由定义可知 $D(X)=(b-a)^2/12$

- **例**： (正态分布)设随机变量$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，由定义可知 $D(X)=\sigma^2$

- **例**：(指数分布)设随机变量$X \sim E(\lambda)$，由定义可知 $D(X)=1/\lambda^2$

■ 公式的推导：

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2p(x)\,dx=\int_a^b\frac{x^2}{b-a}\,dx=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$D(X)=EX^2-(EX)^2=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-(\frac{a+b}{2})^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2p(x)\,dx=\int_0^{+\infty}x^2\lambda e^{-\lambda x}dx=-x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}xe^{-\lambda x}dx$$

$$=\frac{2}{\lambda}\int_0^{+\infty}x\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{2}{\lambda^2}$$

$$D(X)=EX^2-(EX)^2=2\lambda^{-2}-\lambda^{-2}=\lambda^{-2}$$

二.方差的性质

- （1）$D(C)=0$, C为常数.
- （2）设k为常数，则$D(kX)=k^2 D(X)$.
- （3）$D(X+C)=D(X)$
- （4） 若X、Y相互独立且$D(X)$ 、$D(Y)$存在，则 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

- 推论: $D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2E[(X-EX)(Y-EY)]$

  $D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2E[(X-EX)(Y-EY)]$

- （4）的证明:我们仅对和的情形加以证明

$$D(X+Y)=E\left[X+Y-E\left(X+Y\right)\right]^2=E\left[\left(X-EX\right)+\left(Y-EY\right)\right]^2$$

$$=E\left[\left(X-EX\right)^2+\left(Y-EY\right)^2+2\left(X-EX\right)\left(Y-EY\right)\right]$$

$$=D(X)+D(Y)+2E\left[(X-EX)(Y-EY)\right]$$

由$E\left[(X-EX)(Y-EY)\right]=E(X-EX)E(Y-EY)=0$得：

$$D(X+Y)=DX+DY$$

三.切比雪夫不等式

- **定理：（切比雪夫不等式）**

设随机变量X的期望EX，方差DX存在, 则对任意ε>0，有

$$P(|X-EX|\geq\varepsilon)\leq\frac{DX}{\varepsilon^2}$$

- **证明：**

$$P(|X-EX|\geq\varepsilon)=\int_{\{x||x-EX|\geq\varepsilon\}}p(x)dx\leq\int_{\{x||x-EX|\geq\varepsilon\}}\frac{|x-Ex|^2}{\varepsilon^2}p(x)dx$$

$$\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-EX)^2p(x)dx=\frac{DX}{\varepsilon^2}$$

- 若D(X)=0，则对任意ε>0，有

$$0 \le P\left(\left|X - EX\right| \ge \varepsilon\right) \le \frac{DX}{\varepsilon^2} = 0$$

- 从而

$$P\left(X \ne EX\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{|X - EX| \ge \frac{1}{n}\}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left(|X - EX| \ge \frac{1}{n}\right) = 0$$

- **例**：设随机变量X和Y的数学期望分别为-2和2，方差为1和4。E[(X+2)(Y-2)]=-1，则根据切比雪夫不等式求概率P(|X+Y|≥6)的一个上界。
- **解**：

$$P\left(\left|X+Y\right|\geq 6\right)=P(|X+Y-EX-EY|\geq 6)$$

$$\leq \frac{D(X+Y)}{6^2}=\frac{DX+DY+2Cov(X,Y)}{36}=\frac{1+4-2}{36}=1/12$$

- 例：设随机变量X的密度函数为 $p(x)=\dfrac{1}{2\lambda}e^{-\frac{|x-\mu|}{\lambda}}$ 求EX和DX。
- 解：

$$EX=\mu, DX=2\lambda^2$$

- 例：设随机变量X的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases} x, & 0<x<1, \\ 2-x, & 1<x<2, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

- 求EX和DX。
- 解： $EX=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2 x(2-x)dx=1, DX=\dfrac{1}{6}$

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{2\lambda}e^{-\frac{|x-\mu|}{\lambda}}\,dx \overset{t=\frac{x-\mu}{\lambda}}{=\!=} \int_{-\infty}^{+\infty}(\mu+\lambda t)\frac{1}{2}e^{-|t|}\,dt$$

$$p(x)=\begin{cases} x & x\in(0,1) \\ 2-x & (1,2) \\ 0 & \text{other} \end{cases}$$

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,p(x)\,dx=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2(2-x)x\,dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1+x^2-\frac{1}{3}x^3\Big|_1^2$$

$$=\frac{1}{3}+4-\frac{8}{3}-1+\frac{1}{3}$$

$$=1$$

$$DX=E(X-EX)^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-1)^2p(x-1)\,dx=\int_{-1}^{0}x^3dx+\int_0^1(2-x)x^2dx$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

$X,Y\sim N(0,\frac{1}{2})$ 求$D(|X-Y|)$

- 例：设随机变量X,Y独立，均服从N(0,1/2)。求D(|X-Y|)。

$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$

$X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

$X_1 \pm X_2 \sim N(\mu_1 \pm \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

- 解：

$$Z = X - Y \sim N(0,1)$$

$$D(|X-Y|) = E(|X-Y|^2) - [E(|X-Y|)]^2$$

$$= E(Z^2) - [E(|Z|)]^2 = 1 - [\int |z| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz]^2$$

$$= 1 - [2\int_0^{+\infty} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz]^2 = 1 - \frac{2}{\pi}$$

§4.3 协方差与相关系数

- **定义：** E[(X-EX)(Y-EY)]称为随机变量X与Y的协方差，记为Cov(X, Y)。即

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E[(X-EX)(Y-EY)]$$

- **协方差的一般计算公式：**

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

协方差的性质

- （1） $Cov(X, Y)= Cov(Y, X)$；
- （2） $\forall a,b,c,d$, $Cov(aX+c, bY+d)= abCov(X, Y)$;
- （3） $Cov(X_1+X_2, Y)= Cov(X_1, Y)+ Cov(X_2, Y)$;
- （4）若X、Y相互独立，则 $Cov(X, Y)= 0$；反之，则不一定成立。

- **例**：若二维随机向量（X, Y）服从二元正态分布$N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，试求cov(X,Y)。
- 解：

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E\big[(X-EX)(Y-EY)\big]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)\,p(x,y)\,dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\times$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}dxdy$$

- 变量代换：令 $u=\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}, v=\dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}$
- 于是得到：

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}uv\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[u^2-2\rho uv+v^2\right]\right\}dudv$$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}uv\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[(u-\rho v)^2+(1-\rho^2)v^2\right]\right\}dudv$$

配谁先积谁

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}ve^{-\frac{v^2}{2}}dv\int_{-\infty}^{+\infty}u\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\exp\left\{-\frac{(u-\rho v)^2}{2(1-\rho^2)}\right\}du$$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2\rho}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}v^2e^{-\frac{v^2}{2}}dv=\sigma_1\sigma_2\rho.$$

$E(V^2)$ $V\sim N(0,1)$

- **例**：设随机向量(X,Y)的密度函数为：

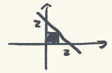
$$p(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1,0<y<1\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求cov(X,Y)。

- **解**：

$$E(X)=E(Y)=\frac{5}{12},E(XY)=\frac{1}{6}$$

$$cov(X,Y)=-\frac{1}{144}$$

$y=2-x$ 

$$p(x,y)=\begin{cases} 2-x-y & 0<x<1,\ 0<y<1 \\ 0 & \text{other} \end{cases}$$

或 $EX=\int_0^1\int_0^1 x\,p(x,y)\,dx\,dy=\cdots$

$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\,dy=\int_0^1 2-x-y\,dy = 2-x-\frac{1}{2}y^2\Big|_0^1=\frac{3}{2}-x$

$p_Y(y)=\frac{3}{2}-y$

$EX=\int_0^1 x\,p_X(x)\,dx=\int_0^1 x(\frac{3}{2}-x)\,dx=\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$.

$9-4$

同理, $EY=\frac{5}{12}$.

$E(XY)=\int_0^1\int_0^1 xy\,p(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1\int_0^1 xy(2-x-y)\,dx\,dy=\frac{1}{6}$

$=\int_0^1 y\int_0^1 x(2-x-y)$

$Cov(X,Y)=E(XY)-EXEY=\frac{1}{6}-(\frac{5}{12})^2=-\frac{1}{144}$

定理（柯西–许瓦兹不等式）若随机变量X、Y的二阶原点矩存在，则

$$cov^2(X,Y) \le DX \cdot DY$$

其中等号成立的充要条件为，存在常数a, b，使得

$$P(Y = aX + b) = 1$$

- 证明：定义函数

$$u(t)=E\left[t(X-EX)-(Y-EY)\right]^2=t^2D(X)-2t\operatorname{cov}(X,Y)+D(Y)$$

利用判别式知

$$\left[2\operatorname{cov}(X,Y)\right]^2-4D(X)D(Y)\le 0$$

即得柯西-施瓦兹不等式。等式成立的充要条件是**u(t)=0**有一个二重根。于是

$$u(t_0)=E\left[t_0(X-EX)-(Y-EY)\right]^2=D\left(t_0(X-EX)-(Y-EY)\right)=0$$

由切比雪夫不等式可知：

$$P\left(t_0(X-EX)-(Y-EY)=0\right)=1$$

二. 相关系数

- 设随机变量X具有数学期望E(X)= μ， 方差DX=σ^2不为0，记

$$X^* = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

则

$$EX^* = 0, DX^* = 1$$

- X^*称为X的**标准化**随机变量。

$$E\left(\frac{X-EX}{\sqrt{DX}}\right)^3 \text{称为偏度，} \quad E\left(\frac{X-EX}{\sqrt{DX}}\right)^4 \text{称为峰度，}$$

- **定义**： 若随机变量X与Y的方差存在且均不为0，则称

$$\rho_{XY} = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$$

为随机变量 X,Y的相关系数，记为ρ_{XY} 。

- **注**： $\rho_{XY} = cov(\frac{X-EX}{\sqrt{DX}},\frac{Y-EY}{\sqrt{DY}})$

相关系数的性质

- （1）$|\rho_{XY}|\le 1$
- （2）$|\rho_{XY}|=1 \Leftrightarrow$ 存在常数a, b，使 $P(Y=aX+b)=1$
- （3）当$\rho_{XY}=0$时，称X和Y不相关；当$\rho_{XY}>0$时，称X和Y正相关；当$\rho_{XY}<0$时，称X和Y负相关；
- （4）若X和Y相互独立，则X和Y不相关；反之不然。
- 注： 相关系数是刻画随机变量间的线性相关程度的量。$|\rho_{XY}|$接近0， X和Y的线性关系弱，。$|\rho_{XY}|$接近1， X和Y的线性关系强。

以下四个命题等价：

- （1） $\rho_{XY}=0$;
- （2） $cov(X,Y)=0$;
- （3） $EXY=EXEY$;
- （4） $D(X\pm Y)=DX+DY$.

- 例：已知随机变量X，Y的方差分别为D(X)=16，D(Y)=25，X，Y的相关系数$\rho_{XY}=1/2$，求D(X+Y)和D(X-Y)。
- 解：

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{DXDY}=10;$$

$$D(X+Y)=DX+DY+2\operatorname{cov}(X,Y)=61;$$

$$D(X-Y)=DX+DY-2\operatorname{cov}(X,Y)=21.$$

- 例：设随机变量θ~U[0,2π]，X=sinθ,Y=sin(θ+a)，其中a∈[0,2π]为常数。求ρ_{XY}，并讨论X,Y的相关性与独立性。
- 解：

$$EX = E\sin\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\sin\theta d\theta = 0; EY = 0;$$

$$EX^2 = E\sin^2\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\sin^2\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta = \frac{1}{2};$$

$$EY^2 = \frac{1}{2}; DX = \frac{1}{2}; DY = \frac{1}{2}.$$

$$EXY = E\sin\theta sin(\theta+a) = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\sin\theta\sin(\theta+a)d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}[\cos a - \cos(2\theta+a)]d\theta = \frac{\cos a}{2}$$

$$\rho_{XY} = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DXDY}} = \cos a.$$

当$a=\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}$时，$X$与$Y$不相关。否则$X$与$Y$相关。

又$X^2+Y^2=1$,所以X与Y不独立。

§4.4 矩与协方差阵

- **定义**： 设X是随机变量，若

$$E(X^k), \quad k=1,2,\ldots$$

存在，则称它为X的k阶**原点矩**.

若 $E[X-E(X)]^k, \quad k=1,2,\ldots$

存在，则称它为X的k阶**中心矩**.

- **例**： 设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，求X的k阶中心矩。

解：

$$E(X-EX)^k=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^k\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma^k t^k\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-t^2}{2}}dt$$

$$E(X-EX)^k=\begin{cases}0, & k\text{为奇数;}\\ \sigma^k(k-1)!!, & k\text{为偶数。}\end{cases}$$

- 定义：对于随机向量 $X=(X_1,X_2,\dots,X_n)^T$，称

$$EX=(EX_1,EX_2,\dots,EX_n)^T$$

为X的**数学期望**。称矩阵

$$\Sigma=(c_{ij})_{n\times n}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

为X的**协方差阵**。其中 $c_{ij}=\operatorname{cov}(X_i,X_j)$

- 例：二维正态分布的密度函数为

$$p(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\times$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi|\Sigma|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu)\right\}$$

- 其中$X=(x_1,x_2)^T$，$\mu=(\mu_1,\mu_2)^T$ $\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}$ 为协方差阵。